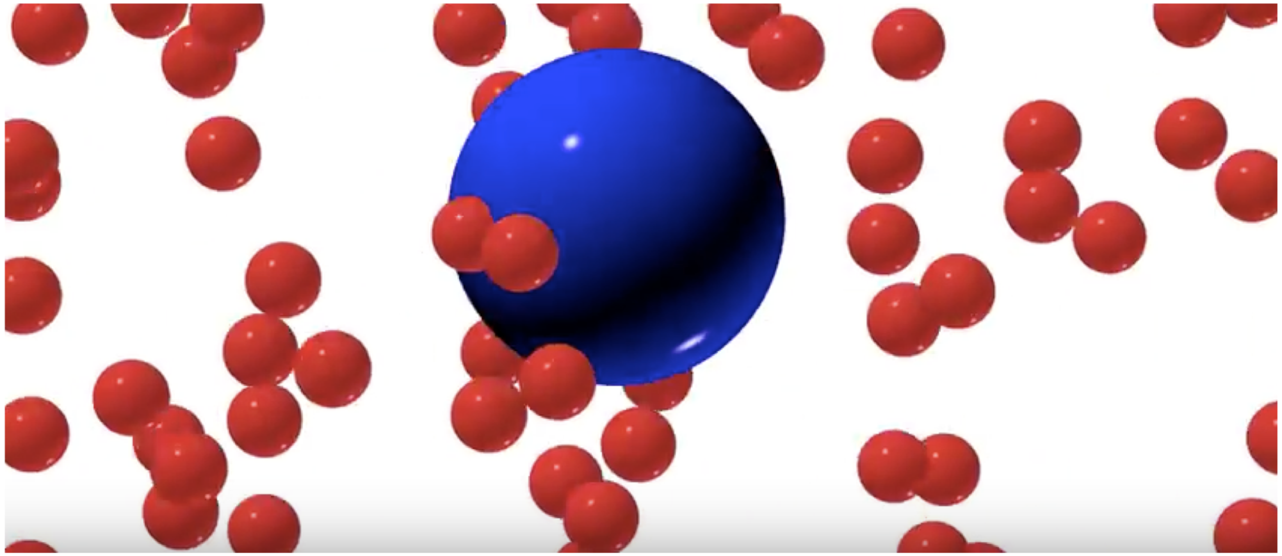
The Physics of Energy

Luca Gammaitoni

Corso di Laurea in Fisica, 2020-2021

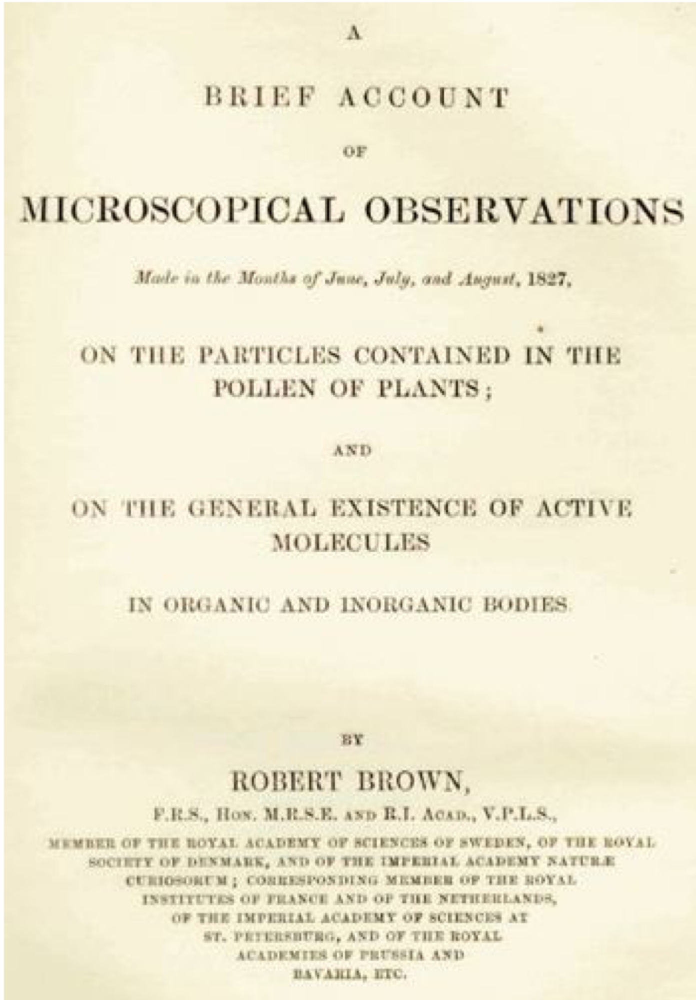
Brownian motion



Per la fenomenologia, vedere: https://www.youtube.com/watch?v=cVkRnEpbeaI
https://www.youtube.com/watch?v=R4t32aGtO3c

Robert Brown

(Montrose, 21 dicembre 1773 – Londra, 10 giugno 1858)



A

BRIEF ACCOUNT

OF

MICROSCOPICAL OBSERVATIONS

Made in the Months of June, July, and August, 1827,

ON THE PARTICLES CONTAINED IN THE POLLEN OF PLANTS;

AND

ON THE GENERAL EXISTENCE OF ACTIVE MOLECULES

IN ORGANIC AND INORGANIC BODIES.

BY

ROBERT BROWN,

F.R.S., HON. M.R.S.E. AND R.I. ACAD., V.P.L.S.,

MEMBER OF THE ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF SWEDEN, OF THE ROYAL SOCIETY OF DENMARK, AND OF THE IMPERIAL ACADEMY NATURÆ CURIOSORUM; CORRESPONDING MEMBER OF THE ROYAL INSTITUTES OF FRANCE AND OF THE NETHERLANDS, OF THE IMPERIAL ACADEMY OF SCIENCES AT ST. PETERSBURG, AND OF THE ROYAL ACADEMIES OF PRUSSIA AND BAVARIA, ETC.

Jan Ingenhousz described the irregular motion of coal dust particles on the surface of alcohol in 1785. However, the discovery of this phenomenon is often credited to the botanist Robert Brown in 1827.

Sviluppi

. . . il moto browniano ci fornisce una delle più belle e dirette dimostrazioni sperimentali dei fondamentali principi della teoria meccanica del calore, manifestando quell'assiduo stato vibratorio che esser deve e nei liquidi e nei solidi ancor quando non si muta in essi la temperatura.

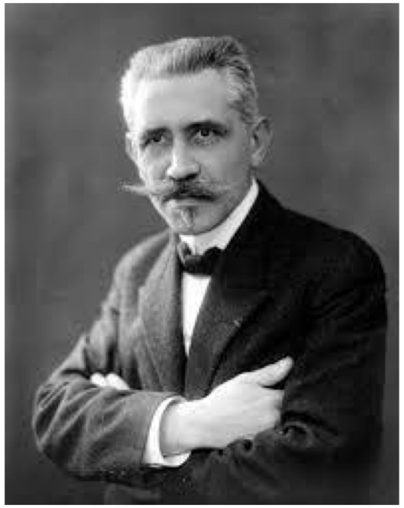
Giovanni Cantoni

(Su alcune condizioni fisiche dell'affinità,e sul moto browniano, in Rendiconti del Regio istituto lombardo di scienze e lettere, s. 2, I (1868), pp. 56-57)

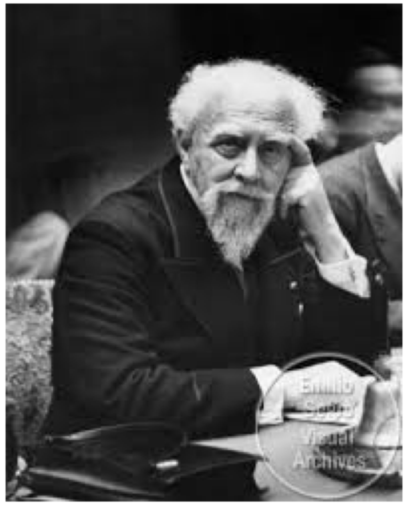
I protagonisti

Albert Einstein
(1879 - 1955)

Marian Smoluchowski
(1872 - 1917)



Paul Langevin
(1872 - 1946)



Jean Baptiste Perrin
(1870 - 1942)

Timeline

J. Ingenhousz 1795
R. Brown 1827

A. Einstein 1905
M. Smoluchowski 1906

J. Perrin 1908
P. Langevin 1908

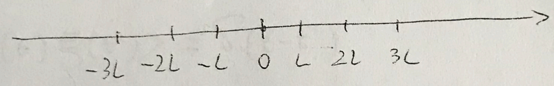
Moto Browniano

Robert Brown 1827 (J. Ingenhousz 1785)

A. Einstein 1905 – M. Smoluchowski (1906)

Analogia con il cosiddetto RANDOM WALK

Consideriamo il random walk semplice:
- 1 dimensione
- passi di uguale ampiezza L
- 50% prob. di avere $+L$ e $-L$.



Domande:
- dove si trova in media dopo n passi? $\langle x_n \rangle = 0$
- quanto si allontana in media $\langle x_n^2 \rangle$? $\langle x_n^2 \rangle = nL^2$
  (la varianza della distanza è $\sigma^2_{x_n}$)

$$x_n = x_{n-1} \pm L \quad \Rightarrow \quad \langle x_n^2 \rangle = \langle (x_{n-1} \pm L)^2 \rangle =$$

$$= \langle x_{n-1}^2 + L^2 \pm 2 x_{n-1} L \rangle =$$

$$= \langle x_{n-1}^2 \rangle + L^2 \pm \underbrace{\langle x_{n-1} \rangle}_{0} L =$$

$$= \langle x_{n-1}^2 \rangle + L^2$$

Ora se $n = 1$ e $X_0 = 0$ si ha $\langle x_1^2 \rangle = 0 + L^2 = L^2$

$$\langle x_2^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + L^2 = 2L^2$$

$$\dots$$

$$\langle x_n^2 \rangle = nL^2$$

Ovvero la varianza cresce con t

Torniamo ora al problema del moto Browniano: particelle di massa m immerse nel liquido.

Seguiamo la derivazione dovuta a Langevin (per noi più semplice di quella di Einstein).

Equazione del moto di ~~Einstein~~ Newton (1 dim)

$$(1) \qquad m\ddot{x} = f \qquad\qquad f = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$$

forza di attrito viscoso

forza stocastica

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\,\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

$$\gamma = 6\pi\, r\, \eta$$ legge di Stokes

raggio della sfera

coefficiente di viscosità

La (1) diventa

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$$

Moltiplico tutto per x

$$(2) \qquad m\, x\ddot{x} = -\gamma\, x\dot{x} + x\,\xi(t)$$

osserva che ~~dx~~ $\frac{d}{dt}x^2 = 2x\dot{x}$

quindi $\frac{d^2}{dt^2}x^2 = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}) = 2x\ddot{x} + 2\dot{x}^2$

da cui $\quad x\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - \dot{x}^2 \qquad$ e $\quad x\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}x^2$

sostituisco nella (1)

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - m\dot{x}^2 = -\gamma\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x^2 + x\,\xi(t)$$

prendo il valor medio ~~...~~ (integrale e media commutano)

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle - m\langle \dot{x}^2\rangle = -\gamma\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle + \langle x\,\xi(t)\rangle$$

ove $\langle x\,\xi(t)\rangle = 0$ perché non correlati

$$\frac{1}{2}m\langle \dot{x}^2\rangle = \frac{1}{2}KT \qquad \text{(Equip. dell' energia)}$$

ipotesi dell' eq. termica

quindi

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt}\langle x^2\rangle - KT = -\gamma\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle$$

Chiamo $\alpha = \frac{d}{dt}\langle x^2\rangle$

$$\frac{m}{2}\dot{\alpha} - KT + \gamma\frac{1}{2}\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\alpha} + \gamma\frac{1}{2}\alpha - KT = 0$$

$$\dot{\alpha} + \frac{\gamma}{m}\alpha - \frac{2KT}{m} = 0$$

Eq. differenziale lineare a coeff. costanti

$$\dot{\alpha} + \frac{\gamma}{m}\alpha - \frac{2kT}{m} = 0$$

$$\alpha = a + b\,e^{-ct}$$

$$\dot{\alpha} = -bc\,e^{-ct}$$

sostituisco $\quad -bc\,e^{-ct} + \frac{\gamma}{m}a + \frac{\gamma}{m}b\,e^{-ct} - \frac{2kT}{m} = 0$

che comporta $\quad +\frac{\gamma}{m}a = \frac{2kT}{m} \Rightarrow a = \frac{2kT}{\gamma}$

$c = \frac{\gamma}{m}$

$b =$ cost. qualunque
fissa il valore a $t=0$

quindi $\alpha = \frac{2kT}{\gamma} + C\,e^{-\frac{\gamma}{m}t}$

transiente

dopo un tempo t_0 (grande quanto?)

$$\alpha = \frac{2kT}{\gamma} \Rightarrow \alpha = \frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \frac{2kT}{\gamma}$$

da cui $\quad \langle x^2\rangle = \frac{2kT}{\gamma}t$

Bene!

Nel caso tridimensionale

$$\langle x^2\rangle = 3\cdot 2\,\frac{kT}{\gamma}t = \frac{6kT}{\gamma}t$$

Se sostituisco $\gamma = 6\pi r\eta \Rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{kT}{\pi r\eta}t$ (Einstein)

To learn more:

Probabilità in Fisica
Guido Boffetta, Angelo Vulpiani
Chap. 4 Il moto Browniano: primo incontro con i processi stocastici